पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» ठोस आकृतियों की पुनरावृत्ति और संयोजन का परिचय

प्रश्न 1 (आसान). एक परख नली (test tube) कौन सी दो आकृतियों के संयोजन से बनती है?
उत्तर – एक बेलन और एक अर्धगोला

प्रश्न 2 (आसान). तुम्हारे खेलने वाला लट्टू कौन सी दो मूल आकृतियों का संयोजन है?
उत्तर – एक शंकु और एक अर्धगोला

प्रश्न 3 (मध्यम). एक लकड़ी के खिलौने में एक शंकु के आधार पर एक बेलन जुड़ा हुआ है, और बेलन के ऊपर एक गोला रखा है। इसमें कितनी आकृतियाँ हैं और कौन-कौन सी?
उत्तर – इसमें तीन आकृतियाँ हैं: शंकु, बेलन और गोला।

» संयोजित ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने का सिद्धांत

प्रश्न 4 (आसान). एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है। पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए आप किन-किन आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल जोड़ेंगे?
उत्तर – बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + पहले अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + दूसरे अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

प्रश्न 5 (आसान). अगर एक घन के ऊपर एक अर्धगोला रखा है, तो उसका कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए आप क्या करेंगे?
उत्तर – घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल - अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल + अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

प्रश्न 6 (मध्यम). एक लकड़ी के खिलौने रॉकेट का निचला हिस्सा बेलनाकार है और ऊपर का हिस्सा शंक्वाकार है। यदि शंक्वाकार हिस्से को नारंगी और बेलनाकार हिस्से को पीले रंग से रंगना है, तो नारंगी रंग वाले हिस्से का क्षेत्रफल क्या होगा? (शंकु का आधार बेलन के आधार से बड़ा है।)
उत्तर – शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + (शंकु के आधार का क्षेत्रफल - बेलन के आधार का क्षेत्रफल)।

» बेलन और अर्धगोले के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

प्रश्न 7 (आसान). एक खिलौना अर्धगोले पर अध्यारोपित एक शंकु के आकार का है। यदि अर्धगोले की त्रिज्या 3.5 cm है, तो खिलौने का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हमें किन दो आकृतियों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल की आवश्यकता होगी?
उत्तर – अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल और शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

प्रश्न 8 (आसान). एक ठोस एक बेलन के दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगाने से बना है। यदि बेलन की त्रिज्या 7 cm है, तो बेलन और अर्धगोलों के वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल के सूत्र लिखें।
उत्तर – बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2rh$, अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2r^2$।

प्रश्न 9 (मध्यम). एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्धगोला लगा हुआ है। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 mm है और उसका व्यास 5 mm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (= 22/7)
उत्तर – 220 mm^2

प्रश्न 10 (कठिन). एक ठोस बेलन है जिसकी ऊंचाई 10 cm और आधार व्यास 7 cm है। इस बेलन के ऊपर एक अर्धगोला लगाया गया है, जिसकी त्रिज्या बेलन के आधार की त्रिज्या के बराबर है। इस संयुक्त ठोस का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (= 22/7)
उत्तर – 341 cm^2

» शंकु और अर्धगोले के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

प्रश्न 11 (आसान). एक खिलौने में 7 cm त्रिज्या का एक शंकु, उसी त्रिज्या के अर्धगोले पर रखा है। यदि शंकु की तिर्यक ऊँचाई 10 cm है, तो खिलौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 462 cm²

प्रश्न 12 (आसान). एक अर्धगोले पर एक शंकु रखा गया है। अर्धगोले की त्रिज्या 14 cm है और शंकु की ऊँचाई 24 cm है। इस आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 2728 cm²

प्रश्न 13 (मध्यम). एक सजावटी वस्तु में 2.1 cm त्रिज्या वाला एक अर्धगोला है, जिसके ऊपर एक शंकु लगा है जिसकी ऊँचाई 4 cm है। इस वस्तु का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा? (= 22/7)

उत्तर – 70.29 cm²

प्रश्न 14 (कठिन). एक ठोस एक बेलन के रूप में है जिसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं। इसकी कुल लंबाई 19 cm और व्यास 7 cm है। इस ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 418 cm²

» घन और अर्धगोले के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

प्रश्न 15 (आसान). एक घन की भुजा 5 cm है। उसके ऊपर एक अर्धगोला रखा है जिसका व्यास 5 cm है। ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा?

उत्तर – 6 × 5² + × (2.5)² = 150 + (22/7) × 6.25 = 150 + 19.64 = 169.64 cm² (लगभग)

प्रश्न 16 (आसान). यदि एक घनाकार ब्लॉक में से 4 cm व्यास का अर्धगोलाकार गड्ढा खोदा जाता है, तो कौन सा क्षेत्रफल कम होगा और कौन सा बढ़ेगा?

उत्तर – घन के एक फलक का वृत्ताकार क्षेत्रफल कम होगा और अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल बढ़ेगा।

प्रश्न 17 (मध्यम). एक घनाकार ब्लॉक जिसकी भुजा 'a' है, उसमें से एक अर्धगोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है कि अर्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर – $6a^2 + (a/2)^2 = 6a^2 + a^2/4$

» शंकु और बेलन के संयोजन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

प्रश्न 18 (आसान). एक खिलौना एक बेलन के ऊपर एक शंकु रखकर बनाया गया है। यदि बेलन की त्रिज्या 7 cm, ऊँचाई 10 cm है और शंकु की ऊँचाई 24 cm है, तो खलिौने का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (=22/7)

उत्तर – 1232 cm²

प्रश्न 19 (आसान). एक तंबू एक बेलनाकार है जिस पर एक शंक्वाकार छत है। यदि बेलन की ऊँचाई 3 m और आधार की त्रिज्या 7 m है, तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.5 m है, तो तंबू बनाने के लिए आवश्यक कपड़े का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (=22/7)

उत्तर – 154 m²

प्रश्न 20 (मध्यम). एक रॉकेट का निचला भाग बेलनाकार है जिसकी ऊँचाई 20 cm और व्यास 6 cm है। इसके ऊपर एक शंकु है जिसकी ऊँचाई 8 cm है और आधार का व्यास भी 6 cm है। रॉकेट का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (=3.14)

उत्तर – 555.24 cm²

प्रश्न 21 (कठिन). एक लकड़ी का खिलौना रॉकेट एक शंकु के आकार का है जो एक बेलन पर अध्यारोपित है। रॉकेट की कुल ऊँचाई 30 cm है, शंकु वाले भाग की ऊँचाई 8 cm है। शंकु वाले भाग के आधार का व्यास 8 cm और बेलनाकार भाग के आधार का व्यास 4 cm है। यदि शंकु पर नीला रंग और बेलन पर लाल रंग करना है, तो प्रत्येक रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (=3.14)

उत्तर – नीले रंग का क्षेत्रफल = 129.292 cm^2, लाल रंग का क्षेत्रफल = 364.24 cm^2

» संयोजित ठोसों का आयतन ज्ञात करने का सिद्धांत

प्रश्न 22 (आसान). एक अर्धगोले के ऊपर एक शंकु रखा गया है। अर्धगोले की त्रिज्या 7 cm और शंकु की ऊँचाई 6 cm है। कुल आयतन ज्ञात करें। (= 22/7)

उत्तर – अर्धगोले का आयतन = $(2/3)r^3$ = (2/3) × (22/7) × 7^3 = 718.67 cm^3; शंकु का आयतन = $(1/3)r^2h$ = (1/3) × (22/7) × 7^2 × 6 = 308 cm^3; कुल आयतन = 718.67 + 308 = 1026.67 cm^3

प्रश्न 23 (आसान). एक बेलनाकार पेंसिल के दोनों सिरों पर शंकु के आकार की नोकें हैं। बेलन की लंबाई 15 cm और त्रिज्या 0.5 cm है। प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2 cm है। पेंसिल का कुल आयतन ज्ञात करें। (= 22/7)

उत्तर – बेलन का आयतन = r^2h = (22/7) × $(0.5)^2$ × 15 = 11.78 cm^3; दोनों शंकुओं का आयतन = 2 × $(1/3)r^2h$ = 2 × (1/3) × (22/7) × $(0.5)^2$ × 2 = 1.05 cm^3; कुल आयतन = 11.78 + 1.05 = 12.83 cm^3

प्रश्न 24 (मध्यम). एक ठोस एक घन से बना है जिसकी भुजा 10 cm है, और इस घन के ऊपर एक अर्धगोला रखा है जिसका व्यास 8 cm है। इस संयोजित ठोस का आयतन ज्ञात करें। (= 3.14)

उत्तर – घन का आयतन = $भुजा^3$ = 10^3 = 1000 cm^3; अर्धगोले की त्रिज्या = 8/2 = 4 cm; अर्धगोले का आयतन = $(2/3)r^3$ = (2/3) × 3.14 × 4^3 = 133.97 cm^3; कुल आयतन = 1000 + 133.97 = 1133.97 cm^3

प्रश्न 25 (कठिन). एक टेंट एक बेलनाकार भाग पर एक शंक्वाकार छत के साथ बनाया गया है। बेलनाकार भाग की ऊँचाई 2.1 m और व्यास 4 m है। शंक्वाकार भाग की तिर्यक ऊँचाई 2.8 m है। टेंट के अंदर भरी जा सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात करें। (= 22/7)

उत्तर – बेलनाकार भाग की त्रिज्या = 4/2 = 2 m; बेलन का आयतन = r^2h = (22/7) × 2^2 × 2.1 = 26.4 m^3; शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = 2.8 m, त्रिज्या (r) = 2 m; शंकु की ऊँचाई (h) = $(l^2 - r^2)$ = $(2.8^2 - 2^2)$ = (7.84 - 4) = 3.84 1.96 m; शंकु का आयतन = $(1/3)r^2h$ = (1/3) × (22/7) × 2^2 × 1.96 = 8.21 m^3; कुल आयतन = 26.4 + 8.21 = 34.61 m^3

» घनाभ और अर्धबेलन के संयोजन का आयतन

प्रश्न 26 (आसान). एक खिलौना एक घनाभ पर अर्धबेलन रखे होने जैसा है। घनाभ की विमाएँ 10 cm x 8 cm x 5 cm हैं। अर्धबेलन का व्यास 8 cm है और उसकी लंबाई 10 cm है। इस खिलौने का आयतन ज्ञात करें। (= 3.14)

उत्तर – घनाभ का आयतन = 10 x 8 x 5 = 400 cm^3। अर्धबेलन की त्रिज्या = 8/2 = 4 cm, लंबाई = 10 cm। अर्धबेलन का आयतन = ½ x 3.14 x 4^2 x 10 = ½ x 3.14 x 16 x 10 = 251.2 cm^3। कुल आयतन = 400 + 251.2 = 651.2 cm^3।

प्रश्न 27 (आसान). एक टेंट का निचला हिस्सा 20 m x 10 m x 3 m का घनाभ है और ऊपर का हिस्सा अर्धबेलनाकार है। अर्धबेलन का व्यास 10 m है और लंबाई 20 m है। टेंट में हवा का आयतन क्या होगा?

उत्तर – घनाभ का आयतन = 20 x 10 x 3 = 600 m^3। अर्धबेलन की त्रिज्या = 10/2 = 5 m, लंबाई = 20 m। अर्धबेलन का आयतन = ½ x (22/7) x 5^2 x 20 = ½ x (22/7) x 25 x 20 = 785.71 m^3 (लगभग)। कुल आयतन = 600 + 785.71 = 1385.71 m^3।

प्रश्न 28 (मध्यम). एक वर्कशॉप का निचला भाग 10 m x 7 m x 6 m का घनाभ है और ऊपर एक अर्धबेलन है। यदि वर्कशॉप में 200 m^3 जगह मशीनरी घेरती है और 10 श्रमिक प्रत्येक 0.1 m^3 जगह घेरते हैं, तो वर्कशॉप में बची हुई हवा का आयतन ज्ञात करें। (= 22/7)

उत्तर – घनाभ का आयतन = 10 x 7 x 6 = 420 m^3। अर्धबेलन की त्रिज्या = 7/2 = 3.5 m, लंबाई = 10 m। अर्धबेलन का आयतन = ½ x (22/7) x $(3.5)^2$ x 10 = 192.5 m^3। कुल आयतन = 420 + 192.5 = 612.5 m^3। मशीनरी और

श्रमिकों द्वारा घेरी गई जगह = 200 + (10 x 0.1) = 200 + 1 = 201 m³। बची हुई हवा का आयतन = 612.5 - 201 = 411.5 m³।

प्रश्न 29 (कठिन). एक गोदाम की छत घनाभ और अर्धबेलन के संयोजन में है। घनाभ का आधार 20 m × 10 m है और उसकी ऊँचाई 5 m है। अर्धबेलन का आधार घनाभ की 10 m वाली भुजा पर है। यदि पूरे गोदाम को पेंट करने का खर्च ₹10 प्रति वर्ग मीटर है, तो आयतन ज्ञात करें और पेंट का कुल खर्च भी बताएँ (सिर्फ अंदर की छत और दीवारों पर पेंट करना है, फर्श पर नहीं)। (= 22/7)

उत्तर – यह सवाल आयतन के साथ पृष्ठीय क्षेत्रफल भी पूछ रहा है। आयतन: घनाभ का आयतन = 20 x 10 x 5 = 1000 m³। अर्धबेलन की त्रिज्या = 10/2 = 5 m, लंबाई = 20 m। अर्धबेलन का आयतन = ½ x (22/7) x 5² x 20 = 785.71 m³। कुल आयतन = 1000 + 785.71 = 1785.71 m³।

पेंट का खर्च (पृष्ठीय क्षेत्रफल): घनाभ की चार दीवारों का क्षेत्रफल = 2(l+b)h = 2(20+10)5 = 2 x 30 x 5 = 300 m²। अर्धबेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = ½ x 2rH = rH = (22/7) x 5 x 20 = 314.28 m²। कुल पेंट करने योग्य क्षेत्रफल = 300 + 314.28 = 614.28 m²। पेंट का कुल खर्च = 614.28 x 10 = ₹6142.80।

» बेलन और अर्धगोले के संयोजन का आयतन और वास्तविक धारिता

प्रश्न 30 (आसान). एक बेलनाकार बर्तन की ऊँचाई 7 cm और त्रिज्या 3 cm है। यदि उसके अंदर एक अर्धगोलाकार उभार न हो, तो उसका आयतन क्या होगा?

उत्तर – 197.82 cm³ (r^2h = 3.14 × 3² × 7)

प्रश्न 31 (आसान). एक अर्धगोले की त्रिज्या 4 cm है। उसका आयतन क्या होगा?

उत्तर – 133.97 cm³ ($2/3r^3$ = 2/3 × 3.14 × 4³)

प्रश्न 32 (मध्यम). एक बेलनाकार कंटेनर की ऊँचाई 14 cm और आधार की त्रिज्या 5 cm है। यदि उसके अंदर एक अर्धगोलाकार उभार है जिसकी त्रिज्या 5 cm ही है, तो कंटेनर की वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 879.67 cm³ (r^2h - $2/3r^3$ = 3.14 × 5² × 14 - 2/3 × 3.14 × 5³)

प्रश्न 33 (कठिन). एक प्रयोगशाला में, एक बेलनाकार बीकर है जिसकी ऊँचाई 20 cm और आंतरिक व्यास 10 cm है। इसके निचले भाग में एक अर्धगोलाकार कैप्सूल रखा है जिसकी त्रिज्या बीकर की त्रिज्या के बराबर है। यदि बीकर को पूरा पानी से भर दिया जाए, तो उसमें कितना पानी आएगा? (= 3.14)

उत्तर – 1308.33 cm³ (बेलन की त्रिज्या 5 cm. बेलन का आयतन = 3.14 × 5² × 20 = 1570 cm³. अर्धगोले का आयतन = 2/3 × 3.14 × 5³ = 261.67 cm³. वास्तविक आयतन = 1570 - 261.67 = 1308.33 cm³)

» शंकु और अर्धगोले के संयोजन का आयतन और बेलन से अंतर

प्रश्न 34 (आसान). एक खिलौना एक अर्धगोले पर शंकु आरोपित है। अर्धगोले की त्रिज्या 3 cm है और शंकु की ऊँचाई 4 cm है। खिलौने का कुल आयतन ज्ञात कीजिए। (=3.14)

उत्तर – $V_{अर्धगोला}$ = (2/3)(3)³ = 56.52 cm³। $V_{शंकु}$ = (1/3)(3)²(4) = 37.68 cm³। $V_{खिलौना}$ = 56.52 + 37.68 = 94.2 cm³।

प्रश्न 35 (आसान). एक शंकु और अर्धगोले से बने खिलौने की त्रिज्या 7 cm है और शंकु की ऊँचाई भी 7 cm है। इस खिलौने का आयतन ज्ञात करें। (=22/7)

उत्तर – $V_{अर्धगोला}$ = (2/3)(7)³ = (2/3) × (22/7) × 343 = 718.67 cm³। $V_{शंकु}$ = (1/3)(7)²(7) = (1/3) × (22/7) × 49 × 7 = 359.33 cm³। $V_{खिलौना}$ = 718.67 + 359.33 = 1078 cm³।

प्रश्न 36 (मध्यम). एक शंकु के आकार का खिलौना जिसकी त्रिज्या 5 cm और ऊँचाई 12 cm है, एक बेलन के अंदर रखा है जिसकी त्रिज्या 5 cm और ऊँचाई 12 cm है। बेलन और खिलौने के आयतन का अंतर ज्ञात कीजिए। (यह सिर्फ शंकु है, अर्धगोला नहीं। =3.14)

उत्तर – $V_{बेलन}$ = (5)²(12) = 3.14 × 25 × 12 = 942 cm³। $V_{शंकु}$ = (1/3)(5)²(12) = (1/3) × 3.14 × 25 × 12 = 314 cm³। अंतर = 942 - 314 = 628 cm³।

प्रश्न 37 (कठिन). एक अर्धगोले पर एक शंकु आरोपित है। अर्धगोले की त्रिज्या 6 cm और शंकु की ऊँचाई 8 cm है। इस खिलौने को एक ऐसे बेलन में रखा गया है जिसकी त्रिज्या 6 cm और ऊँचाई 14 cm है। बेलन में बची हुई खाली जगह का आयतन ज्ञात कीजिए। (=3.14)

उत्तर – V_अर्धगोला = (2/3)(6)³ = (2/3) × 3.14 × 216 = 452.16 cm³। V_शंकु = (1/3)(6)²(8) = (1/3) × 3.14 × 36 × 8 = 301.44 cm³। V_खिलौना = 452.16 + 301.44 = 753.6 cm³। V_बेलन = (6)²(14) = 3.14 × 36 × 14 = 1582.56 cm³। खाली जगह = 1582.56 - 753.6 = 828.96 cm³।

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. एक तेल का टैंकर है, जो बीच में बेलनाकार है और उसके दोनों सिरे अर्धगोलाकार हैं। इस टैंकर में कौन-कौन सी मूल आकृतियाँ मिली हुई हैं?

› पहले टैंकर की बनावट पर ध्यान दें।

› टैंकर का मध्य भाग कैसा दिख रहा है?

› टैंकर के दोनों सिरे कैसे दिख रहे हैं?

› अब, इन आकृतियों के नाम बताएं।

उत्तर – इस टैंकर में एक बेलन और दो अर्धगोले मिले हुए हैं।

उदाहरण 2. एक लट्टू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्धगोला अध्यारोपित है। लट्टू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (= 22/7)

› सबसे पहले, हमें यह पहचानना है कि लट्टू किन आकृतियों से मिलकर बना है। यह एक शंकु और एक अर्धगोले से बना है।

› अब, सिद्धांत के अनुसार, हमें सिर्फ़ उन हिस्सों का क्षेत्रफल जोड़ना है जो बाहर से दिखाई देते हैं। यानी, शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA) और अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA)।

› अर्धगोले का व्यास 3.5 cm है, तो त्रिज्या (r) = 3.5 / 2 = 1.75 cm होगी।

› अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2r² = 2 × (22/7) × (1.75)² = 2 × (22/7) × 1.75 × 1.75 = 19.25 cm²।

› शंकु की ऊँचाई निकालने के लिए, लट्टू की कुल ऊँचाई (5 cm) में से अर्धगोले की त्रिज्या (1.75 cm) घटाएँगे। शंकु की ऊँचाई (h) = 5 - 1.75 = 3.25 cm।

› शंकु की तिर्यक ऊँचाई (l) = (r² + h²) = ((1.75)² + (3.25)²) = (3.0625 + 10.5625) = (13.625) 3.69 cm।

› शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = rl = (22/7) × 1.75 × 3.69 = 20.30 cm² (लगभग)।

› अब, लट्टू का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = अर्धगोले का CSA + शंकु का CSA = 19.25 cm² + 20.30 cm² = 39.55 cm²।

उत्तर – लट्टू का पृष्ठीय क्षेत्रफल लगभग 39.55 cm² है।

उदाहरण 3. एक परखनली है जिसका व्यास 2 cm है और कुल लम्बाई 14 cm है। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (परखनली का निचला सिरा अर्धगोलाकार है और ऊपरी भाग बेलनाकार है।)

› सबसे पहले, हमें परखनली की आकृति को समझना होगा। यह एक बेलन और एक अर्धगोले के संयोजन से बनी है।

› दिए गए मान लिखते हैं: व्यास (Diameter) = 2 cm, तो त्रिज्या (radius, r) = 2/2 = 1 cm होगी।

› कुल लम्बाई (Total length) = 14 cm। इसमें अर्धगोले की त्रिज्या भी शामिल है।

› तो, बेलन की ऊँचाई (height, h) निकालने के लिए, कुल लम्बाई में से अर्धगोले की त्रिज्या घटा देंगे: h = 14 cm - 1 cm = 13 cm।

› अब सूत्र का उपयोग करते हैं: परखनली का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल।

› बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2rh = 2 × (22/7) × 1 × 13। इसे हल करने पर लगभग 81.71 cm² आएगा।

› अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2r² = 2 × (22/7) × (1)²। इसे हल करने पर लगभग 6.28 cm² आएगा।

› कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 81.71 cm^2 + 6.28 cm^2 = 87.99 cm^2 (लगभग)।

उत्तर – परखनली का पृष्ठीय क्षेत्रफल लगभग 87.99 cm^2 है।

उदाहरण 4. एक खिलौना लट्टू, 3.5 cm त्रिज्या वाले एक शंकु के आकार का है जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की कुल ऊँचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (= 22/7 लीजिए)

› सबसे पहले, हमें अर्धगोले की त्रिज्या (r) पता है, जो कि 3.5 cm है।

› अब, शंकु की ऊँचाई (h) निकालनी होगी। लट्टू की कुल ऊँचाई 15.5 cm है, इसमें से अर्धगोले की ऊँचाई (जो उसकी त्रिज्या के बराबर होती है, यानी 3.5 cm) घटा देंगे। तो, शंकु की ऊँचाई = 15.5 cm - 3.5 cm = 12 cm।

› शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें उसकी तिर्यक ऊँचाई (l) चाहिए। इसका सूत्र है l = (r^2 + h^2)।

› मान रखेंगे: l = ($(3.5)^2$ + $(12)^2$) = (12.25 + 144) = 156.25 = 12.5 cm।

› अब शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = rl = (22/7) × 3.5 × 12.5 = 11 × 12.5 = 137.5 cm^2।

› अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2r^2$ = 2 × (22/7) × $(3.5)^2$ = 2 × (22/7) × 3.5 × 3.5 = 44 × 0.5 × 3.5 = 22 × 3.5 = 77 cm^2।

› कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = 137.5 cm^2 + 77 cm^2 = 214.5 cm^2।

उत्तर – खिलौने का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 214.5 cm^2 है।

उदाहरण 5. 7 cm भुजा वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्धगोला रखा हुआ है। अर्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

› सबसे पहले, क्योंकि अर्धगोला घन के ऊपर रखा है और अधिकतम व्यास वाला है, तो अर्धगोले का व्यास घन की भुजा के बराबर होगा। यानी, व्यास = 7 cm, तो त्रिज्या (r) = 7/2 = 3.5 cm होगी।

› अब, बने हुए ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने के लिए हमें घन के सभी फलकों का क्षेत्रफल लेना है, लेकिन जो ऊपरी फलक है, उसका वह हिस्सा हटा देना है जहाँ अर्धगोला रखा है। फिर अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल जोड़ना है।

› तो, घनाकार ब्लॉक का पृष्ठीय क्षेत्रफल = 6 × (भुजा)^2 = 6 × $(7)^2$ = 6 × 49 = 294 cm^2।

› अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल = r^2 = (22/7) × $(3.5)^2$ = (22/7) × 3.5 × 3.5 = 11 × 3.5 = 38.5 cm^2।

› अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल = $2r^2$ = 2 × (22/7) × $(3.5)^2$ = 2 × 38.5 = 77 cm^2।

› तो, कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = (घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल) - (अर्धगोले के आधार का क्षेत्रफल) + (अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल)

› = 294 - 38.5 + 77

› = 294 + 38.5

उत्तर – कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल = 332.5 cm^2 होगा।

उदाहरण 6. एक रॉकेट एक बेलन के ऊपर एक शंकु के आकार का है। रॉकेट की कुल ऊँचाई 26 cm है। शंकु वाले भाग की ऊँचाई 6 cm है। शंकु वाले भाग के आधार का व्यास 5 cm है और बेलनाकार भाग के आधार का व्यास 3 cm है। यदि शंकु वाले भाग पर नारंगी रंग करना है और बेलनाकार भाग पर पीला रंग करना है, तो प्रत्येक रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (= 3.14)

› पहले शंकु वाले भाग के लिए: शंकु की ऊँचाई (h) = 6 cm, व्यास = 5 cm, तो त्रिज्या (r) = 2.5 cm। तिर्यक ऊँचाई (l) = (r^2 + h^2) = (2.5^2 + 6^2) = (6.25 + 36) = 42.25 = 6.5 cm।

› बेलनाकार भाग के लिए: बेलन की कुल ऊँचाई = 26 cm, शंकु की ऊँचाई = 6 cm, तो बेलन की ऊँचाई (h') = 26 - 6 = 20 cm। व्यास = 3 cm, तो त्रिज्या (r') = 1.5 cm।

› नारंगी रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल (शंकु वाला भाग): इसमें शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल आएगा। साथ ही, शंकु का आधार बेलन के आधार से बड़ा है, तो शंकु के आधार पर एक वलय (ring) भी दिखाई देगा जिस पर रंग होगा। इसलिए, क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृ. क्षे. + (शंकु के आधार का क्षे. - बेलन के आधार का क्षे.)।

› नारंगी रंग का क्षेत्रफल = rl + (r^2 - r'^2) = (2.5)(6.5) + (2.5^2 - 1.5^2) = (16.25) + (6.25 - 2.25) = (16.25 + 4) = (20.25) = 3.14 × 20.25 = 63.585 cm^2।

› पीले रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल (बेलन वाला भाग): इसमें बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल आएगा और साथ ही बेलन के नीचे वाले आधार का क्षेत्रफल भी, क्योंकि वह खुला होगा। बेलन का ऊपरी आधार तो शंकु से ढका है। इसलिए, क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृ. क्षे. + बेलन के निचले आधार का क्षे.।

› पीले रंग का क्षेत्रफल = $2r'h' + r'^2 = 2(1.5)(20) + (1.5)^2 = (60) + (2.25) = (62.25) = 3.14 \times 62.25 = 195.465$ cm²।

उत्तर – नारंगी रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल = 63.585 cm², पीले रंग से रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल = 195.465 cm²।

उदाहरण 7. एक खिलौना एक बेलन के ऊपर एक शंकु को अध्यारोपित करके बनाया गया है। बेलन की ऊँचाई 10 cm और आधार की त्रिज्या 3 cm है। शंकु की ऊँचाई 4 cm और आधार की त्रिज्या भी 3 cm है। इस संयोजित खिलौने का कुल आयतन ज्ञात कीजिए। (= 3.14)

› पहले बेलन का आयतन निकालेंगे: $V_{बेलन} = r^2h = 3.14 \times (3)^2 \times 10$

› $V_{बेलन} = 3.14 \times 9 \times 10 = 282.6$ cm³

› अब शंकु का आयतन निकालेंगे: $V_{शंकु} = (1/3)r^2h = (1/3) \times 3.14 \times (3)^2 \times 4$

› $V_{शंकु} = (1/3) \times 3.14 \times 9 \times 4 = 3.14 \times 3 \times 4 = 37.68$ cm³

› कुल आयतन के लिए दोनों को जोड़ देंगे: $V_{कुल} = V_{बेलन} + V_{शंकु}$

› $V_{कुल} = 282.6 + 37.68 = 320.28$ cm³

उत्तर – खिलौने का कुल आयतन 320.28 cm³ है।

उदाहरण 8. एक शेड घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्धबेलन आरोपित है। आधार की विमाएँ 7 m × 15 m हैं तथा घनाभाकार भाग की ऊँचाई 8 m है। शेड में समावेशित हो सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। (= 22/7)

› सबसे पहले, हम घनाभ के आकार वाले भाग की विमाएँ देखते हैं। यहाँ लंबाई (l) = 15 m, चौड़ाई (b) = 7 m, और ऊँचाई (h) = 8 m है।

› घनाभ का आयतन ($V_{घनाभ}$) = l × b × h = 15 m × 7 m × 8 m = 840 m³।

› अब अर्धबेलन वाले भाग पर आते हैं। अर्धबेलन का व्यास घनाभ की चौड़ाई के बराबर होगा, यानी 7 m। तो त्रिज्या (r) = व्यास / 2 = 7/2 m = 3.5 m।

› अर्धबेलन की ऊँचाई (जो यहाँ बेलन की 'लंबाई' की तरह काम करती है) घनाभ की लंबाई के बराबर होगी, यानी (H) = 15 m।

› अर्धबेलन का आयतन ($V_{अर्धबेलन}$) = ½ × r^2H = ½ × (22/7) × $(3.5)^2$ × 15।

› इसे हल करते हैं: ½ × (22/7) × (3.5 × 3.5) × 15 = ½ × (22/7) × 12.25 × 15 = 11 × 1.75 × 15 = 288.75 m³।

› शेड में कुल हवा का आयतन = घनाभ का आयतन + अर्धबेलन का आयतन = 840 m³ + 288.75 m³।

उत्तर – शेड में कुल हवा का आयतन = 1128.75 m³ है।

उदाहरण 9. एक बेलनाकार गिलास की ऊँचाई 10 cm है और आंतरिक व्यास 5 cm है। यदि गिलास के निचले आधार में एक उभरा हुआ अर्धगोला है, तो गिलास की आभासी धारिता और उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। (= 3.14 लीजिए।)

› सबसे पहले, गिलास की त्रिज्या (r) ज्ञात करते हैं। व्यास 5 cm है, तो त्रिज्या r = 5/2 = 2.5 cm होगी।

› अब, गिलास की आभासी धारिता निकालेंगे। यह एक पूरे बेलन का आयतन होगा: r^2h। तो, 3.14 × $(2.5)^2$ × 10 = 3.14 × 6.25 × 10 = 196.25 cm³।

› इसके बाद, निचले आधार में उभरे हुए अर्धगोले का आयतन निकालेंगे। इसका सूत्र है $(2/3)r^3$। अर्धगोले की त्रिज्या भी 2.5 cm ही होगी।

› तो, (2/3) × 3.14 × $(2.5)^3$ = (2/3) × 3.14 × 15.625 = 32.71 cm³ (लगभग)।

› आखिर में, वास्तविक धारिता निकालने के लिए, आभासी धारिता में से अर्धगोले का आयतन घटा देंगे।

› वास्तविक धारिता = 196.25 cm³ - 32.71 cm³ = 163.54 cm³।

उत्तर – गिलास की आभासी धारिता 196.25 cm³ है और वास्तविक धारिता 163.54 cm³ है।

उदाहरण 10. एक ठोस खिलौना एक अर्धगोले के आकार का है जिस पर एक लंब वृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2 cm है और आधार का व्यास 4 cm है। इस खिलौने का आयतन ज्ञात कीजिए। यदि एक लंब वृत्तीय बेलन इस खिलौने के परिगत हो तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अंतर ज्ञात कीजिए। (= 3.14 लीजिए)।

› सबसे पहले, हमें शंकु और अर्धगोले की त्रिज्या (r) और शंकु की ऊँचाई (h) पता करनी है। व्यास 4 cm है, तो त्रिज्या r = 4/2 = 2 cm होगी। शंकु की ऊँचाई h = 2 cm दी गई है।

› अब, अर्धगोले का आयतन (V_अर्धगोला) निकालेंगे: V_अर्धगोला = (2/3)r^3 = (2/3) × 3.14 × $(2)^3$ = (2/3) × 3.14 × 8 = 16.746 cm^3 (लगभग)।

› फिर, शंकु का आयतन (V_शंकु) निकालेंगे: V_शंकु = (1/3)r^2h = (1/3) × 3.14 × $(2)^2$ × 2 = (1/3) × 3.14 × 4 × 2 = (1/3) × 25.12 = 8.373 cm^3 (लगभग)।

› खिलौने का कुल आयतन (V_खिलौना) = V_अर्धगोला + V_शंकु = 16.746 + 8.373 = 25.119 cm^3 (इसे हम लगभग 25.12 cm^3 लिख सकते हैं)।

› अब, बेलन का आयतन निकालने के लिए हमें उसकी त्रिज्या (R) और ऊँचाई (H) चाहिए। क्योंकि बेलन खिलौने के 'परिगत' है, मतलब खिलौना उसके अंदर फिट है। तो बेलन की त्रिज्या (R) खिलौने की त्रिज्या के बराबर होगी, यानी 2 cm। और बेलन की ऊँचाई (H) शंकु की ऊँचाई और अर्धगोले की त्रिज्या के योग के बराबर होगी, यानी H = शंकु की ऊँचाई + अर्धगोले की त्रिज्या = 2 cm + 2 cm = 4 cm।

› तो, बेलन का आयतन (V_बेलन) = R^2H = 3.14 × $(2)^2$ × 4 = 3.14 × 4 × 4 = 50.24 cm^3।

› आखिर में, बेलन और खिलौने के आयतन का अंतर = V_बेलन - V_खिलौना = 50.24 - 25.12 = 25.12 cm^3।

उत्तर – खिलौने का आयतन = 25.12 cm^3, और बेलन तथा खिलौने के आयतन का अंतर = 25.12 cm^3।

बोर्ड परीक्षा के लिए ख़ास

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में 'पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन' वाले सवालों में अक्सर पूछी जाती है। अगर आप यह सिद्धांत नहीं समझ पाए, तो आपके जवाब गलत हो सकते हैं, इसलिए इसे ध्यान से समझो!

• यह सवाल बोर्ड परीक्षा में अक्सर पूछा जाता है! गणनाएँ करते समय त्रिज्या, ऊँचाई और तिर्यक ऊँचाई को ठीक से पहचानना और का मान सही जगह इस्तेमाल करना बहुत ज़रूरी है।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षा में 3 से 4 अंकों में आ सकता है। सूत्र सही लगाकर गणनाओं में ध्यान रखें, का मान 22/7 या 3.14 जो दिया हो, वही इस्तेमाल करें।

• ऐसे सवालों में, खासकर वलय के क्षेत्रफल की गणना करते समय बहुत ध्यान देना, क्योंकि अक्सर बच्चे इसे भूल जाते हैं। और की सही वैल्यू (22/7 या 3.14) का इस्तेमाल करना न भूलें।

• यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर बड़े प्रश्नों के हिस्से के रूप में आती है, जहाँ आपको पृष्ठीय क्षेत्रफल के साथ-साथ आयतन भी निकालना होता है। आयतन वाले हिस्से में गलती की गुंजाइश कम होती है, बस सही सूत्र लगाकर जोड़ना है।

• यह संयोजन आयतन वाले सवालों में बहुत आम है और बोर्ड परीक्षा में अक्सर पूछा जाता है। खासकर अगर सवाल में 'मशीनरी द्वारा घेरा गया स्थान' या 'श्रमिकों द्वारा घेरी गई जगह' जैसी बातें दी हों, तो कुल आयतन में से उसे घटाना न भूलें।

• यह प्रश्न बोर्ड परीक्षाओं में अक्सर 3 से 4 अंकों में पूछा जाता है। ध्यान रहे कि 'आभासी' और 'वास्तविक' धारिता के बीच का अंतर स्पष्ट हो।

• यह सवाल बोर्ड परीक्षा में 3 से 4 अंकों में ज़रूर आता है, इसलिए इसके हर चरण को ध्यान से समझना और सही सूत्र लगाना बहुत ज़रूरी है। इकाइयों का खास ध्यान रखना।

एक नज़र में रिवीज़न

› ठोस आकृतियाँ (घनाभ, शंकु, बेलन, गोला) और उनका संयोजन पहचानना।

› संयोजित ठोसों का पृष्ठीय क्षेत्रफल = दिखने वाले वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफलों का योग।

› शंकु+अर्धगोला पृ.क्षे. = rl + $2r^2$ (केवल वक्र पृष्ठ जोड़ें)

› घन + अर्धगोला क्षेत्रफल = $6a^2$ + r^2 (यदि अधिकतम व्यास हो)

› शंकु-बेलन संयोजन: दिखने वाली सतहों का वक्र पृ. क्षे. + वलय/खुला आधार का क्षे.

› संयोजित ठोसों का आयतन = घटक ठोसों के आयतनों का योग

› संयोजित ठोस: घनाभ + अर्धबेलन का आयतन = V_घनाभ + V_अर्धबेलन

› बेलन + अंदर अर्धगोला = बेलन आयतन - अर्धगोला आयतन

› संयोजन का आयतन = हिस्सों का योग; अंतर = बड़े का आयतन - छोटे का आयतन।